

**THỂ NĂNG HẤP DẪN CỦA VẬT THỂ BÊN TRONG VÀ BÊN
NGOÀI TRÁI ĐẤT**

Vũ Huy Toàn

Công ty cổ phần CONINCO-MI

4 Tôn Thất Tùng, Hà Nội. Email: vuhuytoan@conincomi.vn

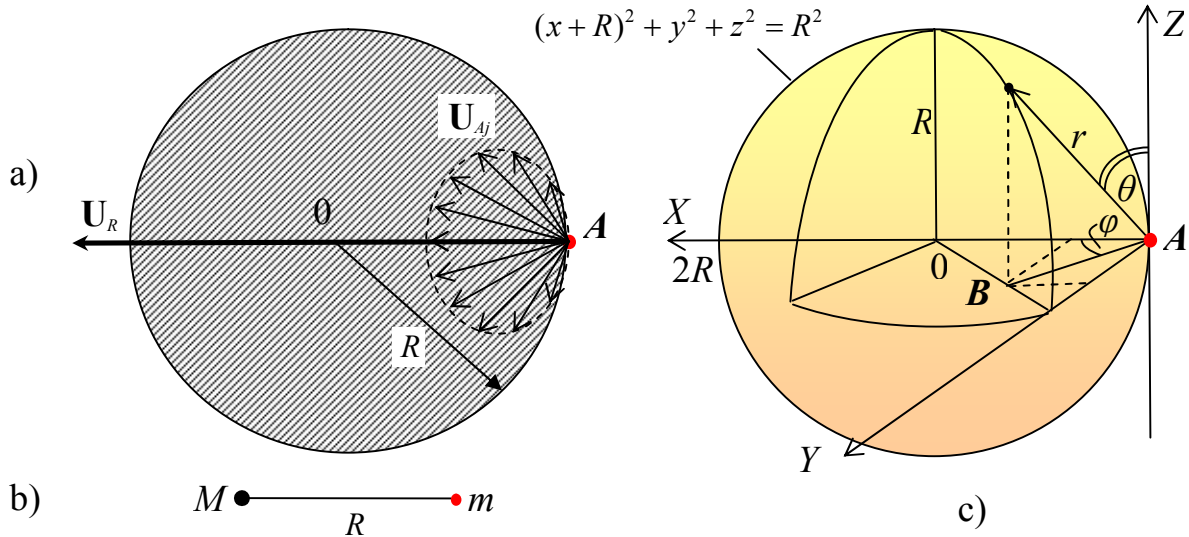
I. Khái niệm thể năng vô hướng và thể năng véc tơ

Trong [1] tác giả đã phân biệt hai khái niệm *ngoại năng cơ* (cơ năng) và *ngoại năng tổng* của một thực thể vật lý, trong đó ngoại năng cơ là đại lượng véc tơ, còn ngoại năng tổng là đại lượng vô hướng.

Trong trường hợp khi các vật được coi là điểm chất, hoặc chỉ quan tâm tới quá trình động lực học thuần túy, có thể sử dụng khái niệm thể năng véc tơ U_R . Ví dụ như khi xem xét dao động của con lắc, chuyển động của con lắc là kết quả của thể năng véc tơ U_R chứ không phải là của thể năng vô hướng \tilde{U}_R nên không sử dụng thể năng vô hướng được, vì rõ ràng khi đưa con lắc vào tâm Trái đất $U_R = 0$ nên con lắc không thể lắc được. Điều này sẽ khác khi có những quá trình sử dụng trực tiếp nội năng của vật như đồng hồ thạch anh, hay đồng hồ nguyên tử. Khi đó, nội năng sẽ phụ thuộc vào thể năng vô hướng \tilde{U}_R chứ không phải thể năng véc tơ U_R và do đó, phải sử dụng khái niệm thể năng vô hướng \tilde{U}_R . Chính vì vậy, mọi tính toán chuyển động của các vật thể chuyển động theo cơ học Newton sẽ vẫn đúng, vì chỉ liên quan tới thể năng véc tơ U_R . Điều này cũng tương tự như các quá trình nhiệt do chuyển động của các phân tử cấu thành nên vật thể. Về thực chất, lúc này, tính véc tơ của động năng không còn được tính đến nữa, mà chỉ còn xét động năng là vô hướng.

Khi coi hai vật là các điểm chất đứng yên hoặc rơi tự do lên nhau, lực tương tác giữa chúng chỉ có một hướng xác định nên ngoại năng cơ và ngoại năng tổng đều chỉ có cùng chung một giá trị. Tuy nhiên, khi một trong hai vật không thể coi là điểm chất, ví dụ như Trái Đất khối lượng M có bán kính R với vật thể A rất nhỏ, khối lượng m trên bề mặt nó (xem Hình 1a). Lực tương tác giữa vật thể A với các phân tử cấu thành nên Trái Đất sẽ không theo cùng một hướng, dẫn đến một thực tế là cơ năng của nó chỉ là véc tơ tổng hợp U_R của tất cả véc tơ cơ năng U_{A_j} tương ứng với mỗi tương tác thành phần. Điều này về thực chất tương đương với việc coi

Trái đất cũng là chất điểm mất rồi (xem Hình 1b). Giá trị của véc tơ này sẽ nhỏ hơn tổng của modul của các véc tơ thành phần đó (là ngoại năng tổng của nó).



Hình 1. Xác định thế năng cơ U_R và thế năng vô hướng \tilde{U}_R

Trong bài này, ta chỉ xem xét vật thể đứng yên nên động năng = 0, do đó, ngoại năng của nó chỉ là thế năng đơn thuần, tức là sẽ phân biệt thế năng véc tơ U_R với modul là U_R và thế năng vô hướng \tilde{U}_R . Thế năng véc tơ về thực chất đã được xem xét từ trước tới nay trong tương tác giữa các điểm chất với modul bằng:

$$U_R = \frac{\gamma mM}{R} \quad (1)$$

nên ta sẽ không đề cập đến nữa mà sẽ chỉ nghiên cứu thế năng vô hướng \tilde{U}_R .

II. Xác định thế năng của vật thể trên bề mặt Trái đất

Giả sử Trái Đất có dạng hình cầu với mật độ vật chất phân bố liên tục, đồng đều bằng ρ . Chọn một hệ trục tọa độ XYZ với gốc đặt ngay tại điểm A như trên Hình 1c. Khi đó, một phần tử bất kỳ thuộc Trái Đất cách A một khoảng r sẽ có các tọa độ là x, y, z tương ứng sao cho:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2)$$

Phương trình bề mặt cầu của Trái Đất khi đó có dạng:

$$(x + R)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

Có thể chuyển sang hệ tọa độ cầu với gốc tại A , các góc định hướng θ , φ và bán kính r :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta; \quad r = -2R \sin \theta \cos \varphi \quad (4)$$

Chúng ta sẽ xét thể năng vô hướng nên tương tác của tất cả các phần tử của Trái Đất với vật thể đang xét sẽ không cộng theo véc tơ mà chỉ cộng modul của chúng:

$$F_R = -\sum \frac{\gamma m \Delta M}{r^2} = -\gamma m \sum \frac{\rho \Delta V}{r^2} \quad (5)$$

Do giả thiết vật chất phân bố liên tục trong thể tích V với mật độ ρ nên có thể biểu diễn lực hấp dẫn tổng hợp dưới dạng tích phân:

$$F_R = -\gamma m \rho \iiint_V \frac{dV}{r^2} \quad (6)$$

Thay (4) vào (6) ta có:

$$F_R = -\gamma \rho \iiint_V \frac{r^2 dr d\theta d\varphi}{r^2} = -8\gamma \rho R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \quad (7)$$

Sau khi lấy tích phân (7) ra, ta được:

$$F_R = -8\gamma \rho R. \quad (8)$$

Thay $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^2}$ vào (8) rồi giản ước đi, ta có dạng quen thuộc hơn:

$$F_R = -\frac{6}{\pi} \frac{\gamma m M}{R^2} \quad (9)$$

Từ (9) có thể viết biểu thức cho lực hấp dẫn tại $R+h$ với $h = 0 \div \infty$:

$$F_h = -\frac{6}{\pi} \frac{\gamma m M}{(R+h)^2} \quad (10)$$

Lưu ý: Lực hấp dẫn xác định theo (9) và (10) không liên quan tới chuyển động cơ học của vật theo định luật 2 cơ động lực học chất điểm (khi mọi chuyển động đều phản ứng theo tính véc tơ của thể năng cũng như động năng), nhưng gắn liền với quá trình chuyển hoá năng lượng từ nội năng của vật sang ngoại năng – ở

đây là thể năng vô hướng của nó và chỉ dùng để xác định thể năng đó bằng công dịch chuyển một vật từ xa vô cùng ($h = \infty$) về tới bề mặt của Trái Đất ($h = 0$):

$$\tilde{U}_R = \int_{\infty}^0 F_h dh \quad (11)$$

Thay (10) vào (11) rồi lấy tích phân, ta được:

$$\tilde{U}_R = \frac{6}{\pi} \frac{\gamma m M}{R} = \frac{6}{\pi} U_R \approx 1,91 U_R \quad (12)$$

Biểu thức (12) chỉ ra phần năng lượng thực sự được chuyển hoá từ nội năng của vật ra thành ngoại năng tương tác của nó (thể năng vô hướng) gần bằng 1,9 lần thể năng cơ U_R tính theo (1) vẫn được sử dụng để tính toán trong cơ học từ trước tới nay.

Tương tự như (12) ta có thể viết biểu thức thể năng vô hướng cho vật thể ở độ cao h nào đó so với mặt đất, chỉ cần thay R bằng tổng $R+h$:

$$\tilde{U}_{R+h} = \frac{6\gamma m M}{\pi(R+h)} = \frac{6}{\pi} U_{R+h} \quad (13)$$

Như vậy, một vật rơi tự do từ một độ cao h xuống mặt đất sẽ có độ gia tăng thể năng vô hướng bằng:

$$\Delta \tilde{U}_R = \tilde{U}_R - \tilde{U}_{R+h} = \frac{6\gamma m M}{\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (14)$$

Có thể biến đổi (14) về dạng:

$$\Delta \tilde{U}_R = \frac{6\gamma m M}{\pi(R+h)} \frac{h}{R} = \frac{6}{\pi} U_{R+h} \frac{h}{R} \quad (15)$$

Độ gia tăng động năng như đã biết:

$$\Delta K = \frac{mV^2}{2} - 0 = K_R \quad (16)$$

luôn bằng độ gia tăng thể năng cơ:

$$\Delta K = \Delta U_R = U_R - U_{R+h} = \frac{\gamma m M}{R} - \frac{\gamma m M}{R+h} = U_{R+h} \frac{h}{R} \quad (17)$$

Do đó, ngoại năng tổng của một vật thể khi tính đến cả động năng của nó tại bề mặt Trái Đất sẽ bằng:

$$W_{ng} = \tilde{U}_{R+h} + \Delta\tilde{U}_R + K_R \quad (18)$$

Sau khi thay (13), (14) và (17) vào (18) và biến đổi đi, ta được:

$$W_{ng} = \left(\frac{6}{\pi} + \frac{6h}{\pi R} + \frac{h}{R} \right) \frac{R}{R+h} U_R \quad (18)$$

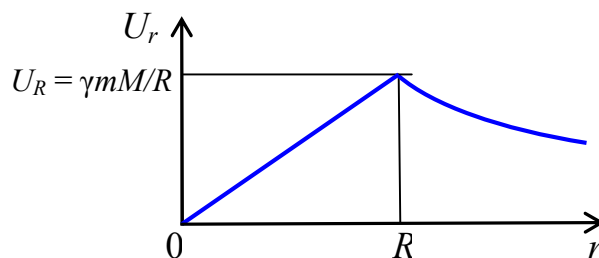
Nếu cho rằng vật thể rơi tự do xuống Trái đất từ $h = \infty$, từ (19) ta có:

$$W_{ng} = \left(\frac{6}{\pi} + 1 \right) U_R \approx 2,9U_R \quad (20)$$

Trong khi đó, theo cơ học cổ điển, ta chỉ có $W_{ng} = K_R + U_R = 2U_R$. Điều này dẫn đến một hệ quả tất yếu là phải xem xét lại cả định luật bảo toàn năng lượng toàn phần vốn chỉ tính tới được thế năng véc tơ với modul bằng U_R chứ chưa phải thế năng vô hướng \tilde{U}_R lớn hơn tới 1,9 lần (tại bề mặt Trái Đất).

III. Xác định thế năng của vật tại tâm Trái đất

Vì trong vật lý từ trước tới nay, luôn bỏ qua sự tham gia của nội năng vào quá trình chuyển hóa năng lượng trong tương tác giữa các thực thể vật lý nên không phân biệt được trạng thái tổng hợp lực bằng 0 với trạng thái không có lực tác động. Chính vì vậy, một vật thể nằm trong tâm Trái đất hình cầu sẽ chịu lực hấp dẫn từ mọi phía như nhau nên tổng hợp lực sẽ bằng 0. Từ đó, người ta cho rằng thế năng hấp dẫn của vật thể ở đây cũng sẽ bằng 0 và tăng tuyến tính dần ra đến bề mặt Trái Đất (bán kính R) thì đạt tới cực đại bằng giá trị tính theo (1), còn sau đó giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách tới tâm như được biểu diễn trên Hình 2.

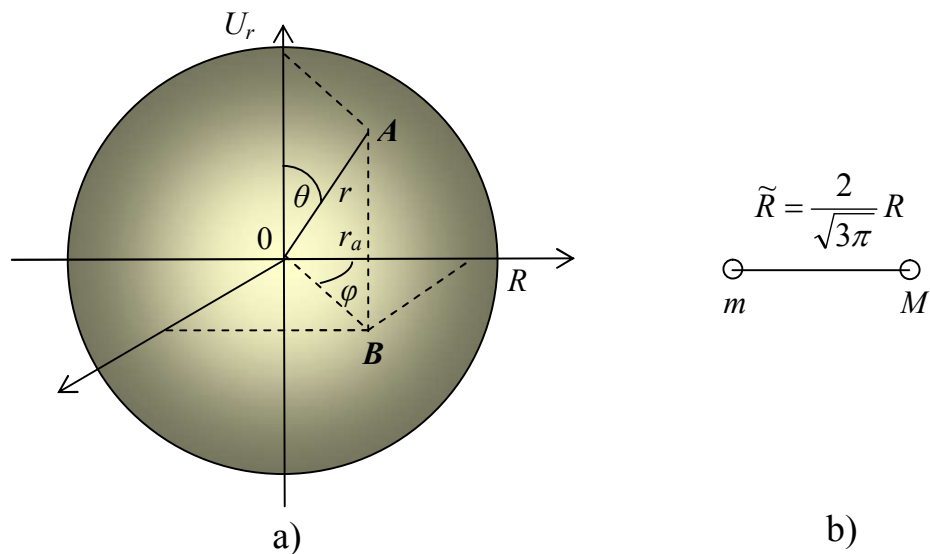


Hình 2. Sự biến thiên thế năng (cơ) từ tâm Trái Đất theo vật lý hiện hành

THỂ NĂNG HẤP DẪN CỦA VẬT THỂ

Tuy nhiên trên thực tế, vật thể vẫn có thể năng hấp dẫn với Trái đất khi nằm ở chính giữa tâm của nó, chỉ có điều, lúc này cần phải tính tới thể năng vô hướng của nó \tilde{U}_R được hiểu như là tổng modul tất cả thể năng cơ của vật thể m với tất cả các phần tử cấu thành nên Trái Đất.

Tương tự như với trường hợp vật thể nằm trên bề mặt Trái Đất, lúc này ta cần xét tổng modul của các tác động dF_0 từ mọi phần tử của Trái Đất ở cách tâm 0 của nó khoảng cách là r như được thể hiện trên Hình 3a.



Hình 3. Thế năng vô hướng \tilde{U}_R tại tâm Trái Đất

Khi đó, lực hấp dẫn giữa vật với một phần tử có thể tích dV bằng:

$$dF_0 = -\gamma m \rho \frac{dV}{r^2} \quad (21)$$

hay:

$$F_0 = \gamma m \rho \iiint_V \frac{dV}{r^2} \quad (22)$$

Trong hệ tọa độ cầu bán kính R có tâm đặt tại tâm 0 của vật, ta có $dV = r^2 dr d\theta d\varphi$ nên có thể lấy tích phân (22) ở dạng:

$$F_0 = -\gamma m \rho \iiint_{V_R} \frac{r^2 dr d\theta d\varphi}{r^2} = -\gamma m \rho \iiint_{V_R} dr d\theta d\varphi .$$

$$F_0 = -\gamma m \rho \iiint_{V_R} dr d\theta d\varphi = -4\gamma \rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr = -\gamma \pi^2 m \rho R$$

hay:
$$F_0 = -\frac{3\pi}{4} \frac{\gamma m M}{R^2}. \quad (23)$$

Có thể viết cách khác:
$$F_0 = -\frac{\gamma m M}{\tilde{R}^2} \quad (24)$$

với:
$$\tilde{R} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} R. \quad (25)$$

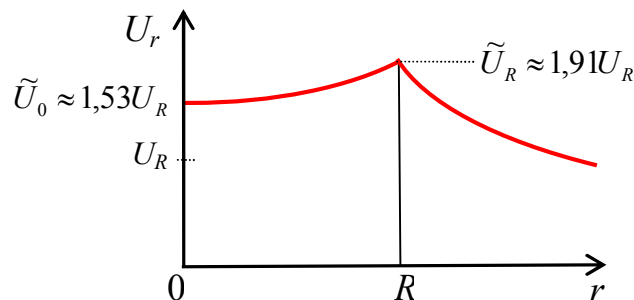
Từ biểu thức (24) có thể coi đó là lực hấp dẫn giữa 2 điểm chất là vật thể khối lượng m với vật thể khối lượng M ở cách nhau một khoảng bằng \tilde{R} (xem Hình 3b). Khi đó, thế năng của vật thể m tại tâm Trái đất tương đương với thế năng của chất điểm m tại khoảng cách \tilde{R} tới chất điểm M và bằng:

$$\tilde{U}_0 = \frac{\gamma m M}{\tilde{R}} \quad (26)$$

Thay (25) vào (26) rồi biến đổi về dạng:

$$\tilde{U}_0 = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{\gamma m M}{R} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} U_R \approx 1,53 U_R \quad (27)$$

Như vậy, khác với sự biến thiên thế năng từ 0 tại tâm Trái Đất nhận được từ vật lý cho đến nay (xem Hình 2), ta có đường biến thiên thế năng từ giá trị $\sim 1,53 U_R$ ở tâm, tăng lên cực đại $\sim 1,9 U_R$ tại bề mặt Trái Đất và sau đó giảm dần tỷ lệ nghịch với khoảng cách $r = R+h$ (xem Hình 4). Tuy nhiên, biểu thức toán học mô tả chính xác 2 đoạn này tác giả chưa tính được.



Hình 4. Sự biến thiên thế năng vô hướng từ tâm Trái Đất

Tài liệu tham khảo

1. Vũ Huy Toàn. *Con đường mới của vật lý học*, NXB Khoa học & Công nghệ, Hà nội, 2007.